# PART2　3次方程式の解から係数の決定

**2**　3次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ の1つの解が $1+2i$ であるとき，定数 $a$，$b$ の値と他の解を求めよ。ただし，$a$，$b$ は実数とする。

**Point Pickup**

与えられた解を方程式に代入し，複素数の相等条件

$A$，$B$ が実数のとき　$A+Bi=0 \iff A=0$ かつ $B=0$

を利用して，方程式の係数を決定し，他の解を求める。

実数係数の $n$ 次方程式が虚数 $a+bi$ を解にもつならば，その共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である。これを利用し，3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

を利用して，方程式の係数および他の解を求めることができる。

また，与えられた方程式の左辺が $x-(a+bi)$，$x-(a-bi)$ を因数にもつことから，左辺を $\{x-(a+bi)\}\{x-(a-bi)\}$ で割った余りを求め，その余りを0とする方法がある。

# 第 3 講　PART2　確認問題

**1**　3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ の 1 つの解が $3-2i$ であるとき，定数 $a$，$b$ の値と他の解を求めよ。ただし，$a$，$b$ は実数とする。

$a=$ [アイ]，$b=$ [ウ]

他の解は [エオ]，[カ] $+$ [キ] $i$

# PART2　3 次方程式の解から係数の決定

**2**　3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，定数 $a$，$b$ の値と他の解を求めよ。ただし，$a$，$b$ は実数とする。

$x=1+2i$ が 3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ の解であるから

$$(1+2i)^3-(a-1)(1+2i)^2+(b-2)(1+2i)+5=0$$

整理すると　$(3a+b-11)+(-4a+2b-2)i=0$

$a$，$b$ は実数であるから，$3a+b-11$，$-4a+2b-2$ も実数である。

よって　$3a+b-11=0$，$-4a+2b-2=0$

したがって　$a=2$，$b=5$

このとき，3 次方程式は

$$x^3-x^2+3x+5=0$$

$$(x+1)(x^2-2x+5)=0$$

$$x=-1,\ 1\pm 2i$$

| 1 | −1 | 3 | 5 | \|−1 |
|---|---|---|---|---|
|  | −1 | 2 | −5 |  |
| 1 | −2 | 5 | 0 |  |

したがって，他の解は $-1$，$1-2i$

（別解 1）

実数係数の 3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ が虚数 $1+2i$ を解にもつとき，共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である。

もう 1 つの解を $\alpha$ とすると，3 次方程式の解と係数の関係より

$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=a-1$ …… ①

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=b-2$ …… ②

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-5$ …… ③

③より　$5\alpha=-5$　　よって　$\alpha=-1$

このとき

①より　$a=\alpha+3=2$

②より　$b=2\alpha+7=5$

したがって　$a=2$，$b=5$

他の解は　$1-2i$，$-1$

（別解２）

実数係数の３次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ が虚数 $1+2i$ を解にもつとき，

共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である。

よって，$P(x)=x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5$ とおくと，$P(1+2i)=0$，$P(1-2i)=0$ より

$P(x)$ は $x-(1+2i)$，$x-(1-2i)$ を因数にもつ。

したがって，$P(x)$ は $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$ すなわち $x^2-2x+5$ で割り切れる。

$P(x)$ を $x^2-2x+5$ で割った余りは

$$(-2a+b-1)x+(5a-10)$$

$$\begin{array}{r|llll}
 & x & +(-a+3) & & \\ \hline
x^2-2x+5 & x^3 & -(a-1)x^2 & +(b-2)x & +5 \\
 & x^3 & -2x^2 & +5x & \\ \hline
 & & (-a+3)x^2 & +(b-7)x & +5 \\
 & & (-a+3)x^2 & -2(-a+3)x & +5(-a+3) \\ \hline
 & & & (-2a+b-1)x & +(5a-10)
\end{array}$$

余りは０であるから

$$-2a+b-1=0,\quad 5a-10=0$$

これを解いて

$$a=2,\quad b=5$$

このとき

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2-2x+5)\{x+(-a+3)\} \\ &=(x^2-2x+5)(x+1) \end{aligned}$$

より，方程式 $P(x)=0$ の他の解は　$1-2i$，$-1$

# 第 3 講　PART2　確認問題 解答

## 1

**[正解]** アイ：$-5$，ウ：$7$，エオ：$-1$，カ：$3$，キ：$2$

**[解説]**

$x=3-2i$ が 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ の解であるから

$$(3-2i)^3+a(3-2i)^2+b(3-2i)+13=0 \quad \text{[A]}$$

整理すると

$$(5a+3b+4)+(-12a-2b-46)i=0$$

$a$，$b$ は実数であるから，$5a+3b+4$，$-12a-2b-46$ も実数である。

よって　$5a+3b+4=0$，$-12a-2b-46=0$ [B]

これを解いて　$\boldsymbol{a=-5}$，$\boldsymbol{b=7}$

このとき，3 次方程式は　$x^3-5x^2+7x+13=0$

左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x^2-6x+13)=0$$

よって

$$x=-1,\ 3\pm 2i$$

| 1 | $-5$ | 7 | 13 | $\lfloor -1$ |
|---|---|---|---|---|
|  | $-1$ | 6 | $-13$ |  |
| 1 | $-6$ | 13 | 0 |  |

したがって，他の解は

$$\boldsymbol{x=-1,\ 3+2i}$$

(別解 1)

実数係数の 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ が虚数 $3-2i$ を解にもつとき，共役な複素数 $3+2i$ もこの方程式の解である。 [C]

もう 1 つの解を $\alpha$ とすると，3 次方程式の解と係数の関係より [D]

$$(3-2i)+(3+2i)+\alpha=-a \cdots\cdots ①$$

$$(3-2i)(3+2i)+(3+2i)\alpha+\alpha(3-2i)=b \cdots\cdots ②$$

$$(3-2i)(3+2i)\alpha=-13 \cdots\cdots ③$$

[A]　$x=\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の解
$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

[B]　複素数の相等条件
$a$，$b$ が実数のとき
$a+bi=0$
$\Longleftrightarrow a=0$，$b=0$

[C]　実数係数の $n$ 次方程式が虚数解 $a+bi$ をもつならば，それと共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である。

[D]　3 次方程式の解と係数の関係
3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

③より　$13\alpha=-13$

よって　$\alpha=-1$

このとき，①より　$6-1=-a$　ゆえに　$a=-5$

②より　$13-1\cdot6=b$　ゆえに　$b=7$

以上から　$\boldsymbol{a=-5,\ b=7}$

他の解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 3+2i}$

（別解 2）

実数係数の 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ が虚数 $3-2i$ を解にもつとき，共役な複素数 $3+2i$ もこの方程式の解である。

よって，$P(x)=x^3+ax^2+bx+13$ とおくと，$P(x)$ は，$x-(3-2i)$，$x-(3+2i)$ を因数にもつ。[E]

[E]　因数定理
$f(x)$ が $x-\alpha$ を因数にもつ
$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

したがって，$P(x)$ は $\{x-(3-2i)\}\{x-(3+2i)\}$ すなわち $x^2-6x+13$ で割り切れる。

$P(x)$ を $x^2-6x+13$ で割った余りは

$$(6a+b+23)x-13(a+5)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(a+6) \\ \hline
x^2-6x+13 & x^3+ax^2+bx+13 \\
 & x^3-6x^2+13x \\ \hline
 & (a+6)x^2+(b-13)x+13 \\
 & (a+6)x^2-6(a+6)x+13(a+6) \\ \hline
 & (6a+b+23)x-13(a+5)
\end{array}$$

余りは 0 であるから

$$6a+b+23=0,\quad -13(a+5)=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-5,\ b=7}$

このとき

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-6x+13)\{x+(a+6)\}\\&=(x^2-6x+13)(x+1)\end{aligned}$$

したがって，他の解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 3+2i}$